Minta feladatsor
I. rész

1. Írja fel az *A* számot 2 hatványaként!

$$A = \frac{4^3 \cdot 2^4 \cdot 8^3}{2^7}$$ **/2 pont/**

2. Mekkora hosszúságú dróttal lehet egy 10m×24m-es téglalap alakú testet az átlója mentén felosztani két derékszögű háromszögre? Adja meg a hosszúságot mértékegységgel! Válaszát indokolja!

/1+2 pont/

3. Hány darab 1-re végződő négyjegyű szám van? Válaszát indokolja! **/1+2 pont/**

4. Mivel egyenlő a $\left(\sqrt{3}+1\right)$ szám négyzete? Adja meg a helyes válasz betűjelét! (Csak egy helyes válasz van.)

A./ 4 B./ $2+\sqrt{3}$ C./ $4+2\sqrt{3}$ D./ $4-2\sqrt{3}$ E./ 2

/2 pont/

5. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a pozitív valós számok halmazán! Válaszát indokolja!

$$\frac{-5}{3-x} \geq 0$$ **/1+2 pont/**

6. Egy számtani sorozat első tagja 8, tizedik tagja 98. Mennyi a_5 értéke? **/2 pont/**

7. Határozza meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = |x| - 2$ függvény értékkészletét!

/2 pont/

8. Egy háromszög csúcsainak koordinátái: *A*(1;3), *B*(2;-2) és *C*(-4;5).

a) Adja meg a súlypont koordinátáit! **/1 pont/**

b) Számítsa ki a háromszög kerületét! **/3 pont/**

9. Hány oldalú az a konvex sokszög, amelyben az átlók száma 14? **/3 pont/**

10. Egy sötét szoba egy fiókjában 8 zöld és 8 bordó zokni van.

a) Legalább hány zoknit kell kivenni a fiókból ahhoz, hogy biztosan legyen legalább két azonos színű zokni köztük?

b) Legalább hány zoknit kell kivenni a fiókból ahhoz, hogy biztosan legyen legalább két zöld zokni köztük?

/2+2 pont/

11. Számítsuk ki az α hegyesszög cosinusát az α szög meghatározása nélkül, ha $\sin\alpha = \frac{4}{5}$!

/2 pont/

II./A rész

12. Reggel 6 órakor egy tehergépkocsi indul *A*-ból *B*-be, 9 órakor egy személygépkocsi *B*-ből *A*-ba, és ennek az átlagsebessége 42 km/h-val nagyobb, mint a tehergépkocsié. 14 órakor találkoznak, és ekkor kiderül, hogy a személygépkocsi 126 km-rel több utat tett meg, mint a tehergépkocsi.

a) Mekkora a gépkocsik átlagsebessége? **/9 pont/**

b) Mekkora az *AB* távolság? **/3 pont/**

13. Mely valós és mely egész számokra értelmezhető az alábbi két kifejezés?

a) $\lg(x-4)+\lg(x+1)$ **/9 pont/**

b) $\lg(x^2-3x-4)$ **/3 pont/**

14. A Primera Division (spanyol első osztályú focibajnokság) első négy fordulójában lejátszott mérkőzések közül 5 esetben nem született gól, 5 meccsen egy, 10 meccsen kettő, 12 meccsen három, 4 mérkőzésen négy, két-két mérkőzésen öt illetve hat gólt szereztek.

a) Készítsen az adatokból táblázatot, oszlop- és kördiagramot! **/6 pont/**

b) Határozza meg az átlagot, a móduszt és a mediánt! **/6 pont/**

II./B rész

15. Egy mértani sorozat első három tagjának összege 28. Ha a második tagot megszorozzuk az első és a harmadik tag összegével, 160-at kapunk. Melyik ez a sorozat? **/17 pont/**

16. Oldja meg a valós számok halmazán a köveztekző egyenleteket!

a) $3\,\mathrm{tg}\dfrac{x}{3}=\sqrt{3}$

b) $\dfrac{1}{2}\log_3(2x-1)-\log_3(x-1)=1$ **/10 pont/**

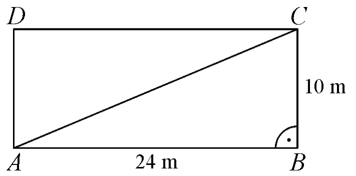
17. Egy kiránduló osztály *A* helyről észak felé indul el, és 48 km-es út után *B*-be érkezik. Innen nyugat felé haladnak tovább. 20 km megtétele után *C*-be érnek, ahol az eddigi menetiránytól balratérnek el , és a *C*-től 107,7 km-re lévő *D* helyre érnek. A *BCD* szög 138°52'. Milyen távol van légvonalban *D* hely a kiindulás *A* helyétől? **/17 pont/**

Megoldás I. rész

1. A hatványozás azonosságait felhasználva:

$$A=\frac{(2^2)^3\cdot 2^4\cdot(2^3)^3}{2^7}=\frac{2^6\cdot 2^4\cdot 2^9}{2^7}=\frac{2^{19}}{2^7}=2^{12}.$$

2. Ábrázoljuk a téglalapot:



Az átló hosszát az *ABC* derékszögű háromszögre felírt Pitagorasz-tétel segítségével kapjuk meg:

$$\begin{aligned} (AB)^2 + (BC)^2 &= (AC)^2 \\ 24^2 + 10^2 &= (AC)^2 \\ 576 + 100 &= (AC)^2 \\ (AC)^2 &= 676 \\ \underline{\underline{AC}} &\underline{\underline{= 26}}\,. \end{aligned}$$

Tehát 26 m hosszúságú drótra van szükségünk.

3. Ha olyan négyjegyű számokat keresünk, amelyek 1-re végződnek, akkor a négy számjegyből az utolsó rögzített, az első helyen pedig nem állhat 0. A közbülső két helyre bármilyen számjegy kerülhet, tehát a keresett négyjegyűek száma $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ db.

4. Az $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ azonosság alapján:

$$\left(\sqrt{3}+1\right)^2 = 3 + 2\sqrt{3} + 1 = 4 + 2\sqrt{3}\,.$$

Így a helyes válasz: *C*.

5. Egy tört értéke akkor és csak akkor lehet nagyobb vagy egyenlő mint nulla, ha számlálója és nevezője azonos előjelű. Mivel az adott tört számlálója negatív, ezért az eredeti egyenlőtlenség ekvivalens a következővel:

$$3 - x < 0.$$

Ennek megoldása:

$$3 < x.$$

Mivel a kapott intervallum minden eleme pozitív valós szám, így a végső megoldás:

$$3 < x, \quad x \in \mathrm{R}.$$

6. Írjuk fel a tizedik tagot a definíció alapján:

$$a_{10} = a_1 + 9d\,.$$

Behelyettesítve a megadott értékeket:

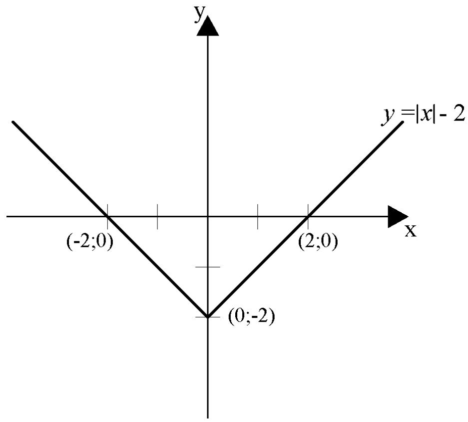
$$\begin{aligned} 98 &= 8 + 9d \\ 90 &= 9d \\ d &= 10. \end{aligned}$$

Ismét a definíciót használva:

$$a_5 = a_1 + 4d = 8 + 4 \cdot 10 = 48,$$

tehát a sorozat ötödik tagja 48.

7. Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben a függvényt!



Az ábráról leolvasható, hogy

$R_F = \{ y \in R \mid y \geq -2 \}$.

8. *a*) A súlypont koordinátáira vonatkozó képlet alapján:

$$S\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3};\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)=\left(\frac{1+2-4}{3};\frac{3-2+5}{3}\right)$$

azaz $S\left(-\frac{1}{3;}2\right)$.

b) Felhasználva a szakasz hosszára vonatkozó képletet:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(2-1)^2+(-2-3)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

$$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{(-4-2)^2+(5+2)^2} = \sqrt{36+49} = \sqrt{85}$$

$$\left|\overline{CA}\right| = \sqrt{(1+4)^2+(5-3)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}\ .$$

Tehát:

$$k = \left|\overline{AB}\right|+\left|\overline{BC}\right|+\left|\overline{CA}\right| = \sqrt{26}+\sqrt{85}+\sqrt{29} \quad (\approx 19{,}7)\,.$$

9. Az *n* oldalú konvex sokszög átlóinak száma:

$$\frac{n(n-3)}{2}.$$

Ezt felhasználva:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 14$$

$$n^2 - 3n = 28$$

$$n^2 - 3n - 28 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{3 \pm 11}{2} = \begin{matrix} n_1 = 7 \\ n_2 = -4\,. \end{matrix}$$

Az oldalak száma nem lehet negatív, így a hétszögről van szó.

10. *a*) Hármat, hiszen ha pl. először kiveszünk egy bordót, akkor már lehet, hogy a második "húzásra" lesz két egyforma színű zokni (ha az is bordó); de ha a második zöld, akkor mivel harmadikra csak az előző kettő szín közül "húzhatjuk" valamelyiket, ezért ekkor már biztosan lesz két egyforma színű zokni.

b) Tizet, mert ha először kivesszük az összes bordó zoknit, akkor a kilencedik és a tizedik lesz a keresett két zöld színű zokni.

11. Mivel $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, így:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{16}{25} + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{25}{25} - \frac{16}{25}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{3}{5}.$$

de ha α hegyesszög, akkor $\cos\alpha > 0$, így:

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}.$$

Megoldás II./A rész

12. Készítsünk táblázatot, amelyben *x* jelöli a tehergépkocsi sebességét!

	***v* [km/h]**	***s* [km]**	***t* [h]**
Tehergépkocsi	x	8*x*	8
Személygépkocsi	x + 42	5(x + 42)	5

Az $s = v \cdot t$ képlettel dolgozunk. A feladat szövege alapján a találkozásig a személyautó 126 km-rel több utat tett meg a teherautónál. Írjuk fel az egyenleteket!

$$s_{\text{személyautó}} = s_{\text{teherautó}} + 126$$
$$5(x + 42) = 8x + 126$$
$$84 = 3x$$
$$x = 28$$

Tehát a teherautó sebessége:

$$v_{\text{teherautó}} = \underline{\underline{28\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}}.$$

A személyautóé pedig:

$$v_{\text{személyautó}} = \underline{\underline{70\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}}.$$

Mivel az egyik autó *A*-ból, a másik *B*-ből indul, ezért az *AB* távolság a találkozásig megtett utak összege:

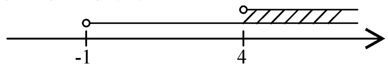
$$s = AB = 8 \cdot 28 + 5 \cdot 70 = \underline{\underline{574\ \text{km}}}.$$

13. *a*) Egy összeg akkor értelmezett, ha minden tagja értelmezett. A logaritmus mögött csak pozitív kifejezés állhat, így:

$$x - 4 > 0 \qquad \text{és} \qquad x + 1 > 0$$

$$x > 4 \qquad\qquad x > -1.$$

Számegyenesen ábrázolva:



Tehát az összeg a következő halmazon értelmezett:

$$M_a = \{x \in R \mid x > 4\}$$

$$M_a = \{x \in Z \mid x > 4\}$$

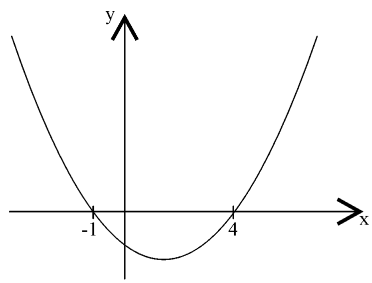
b) Ebben az esetben egy másodfokú egyenlőtlenséget kell megoldani:

$$x^2 - 3x - 4 > 0$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = 4, \qquad x_2 = -1.$$



$x < -1$ vagy $x > 4$ esetén vesz fel a parabola pozitív értékeket.

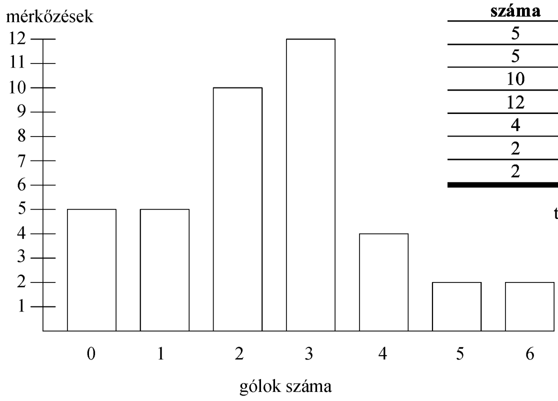
$$M_b = \{x \in R \mid x < -1 \ \text{vagy} \ x > 4\}$$

$$M_b = \{x \in Z \mid x < -1 \ \text{vagy} \ x > 4\}$$

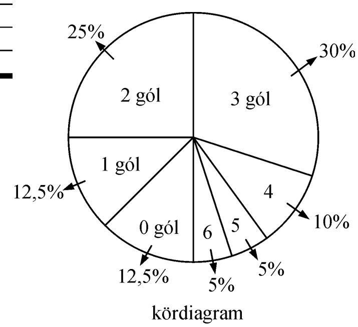
14. *a*)

mérkőzések száma	**gólok száma**
5	0
5	1
10	2
12	3
4	4
2	5
2	6

táblázat



oszlopdiagram



kördiagram

b) Írjuk fel az adatsor elemeit!

0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6,

az átlag: $\frac{5\cdot0+5\cdot1+10\cdot2+12\cdot3+4\cdot4+2\cdot5+2\cdot6}{40}=\underline{\underline{2{,}475}}$.

a módusz: 3, hiszen ez fordul elő a legtöbbször.

a medián: mivel 40 elem van, ezért a 20. és a 21. elem átlaga: $\frac{2+3}{2}=2{,}5$.

Megoldás II./B rész

15. Írjuk fel a két egyenletet:

$$(1)\quad a_1+a_2+a_3=28 \quad\Rightarrow\quad a_1+a_3=28-a_2$$

$$(2)\quad a_2\cdot(a_1+a_3)=160$$

$$(2)\quad a_2\cdot(28-a_2)=160$$

$$28a_2-(a_2)^2=160$$

$$(a_2)^2-28a_2+160=0$$

$$(a_2)_{1,2}=\frac{28\pm\sqrt{784-640}}{2}=\frac{28\pm12}{2}\quad\Rightarrow\quad (a_2)_1=20,\quad (a_2)_2=8.$$

Tehát a mértani sorozat második tagjára kétféle értéket kaptunk. Fejezzük ki a mértani sorozat definíciója alapján az első és a harmadik elemet a másodikkal:

$$a_1=\frac{a_2}{q}\qquad\text{és}\qquad a_3=a_2\cdot q.$$

I. eset:

$$(1)\quad \frac{a_2}{q}+a_2+a_2q=28$$

$$\frac{20}{q}+20+20q=28$$

$$20q^2-8q+20=0$$

$$5q^2-2q+5=0$$

$$q_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-100}}{2}.$$

Mivel a diszkrimináns negatív, ezért a valós számok halmazán nincs megoldás.

II. eset:

$$(1)\quad \frac{8}{q}+8+8q=28$$

$$8q^2-20q+8=0$$

$$2q^2-5q+2=0$$

$$q_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm3}{4}\quad\Rightarrow\quad q_1=2,\quad q_2=\frac{1}{2}.$$

Ha $q_1=2$, akkor a mértani sorozat:

$$a_1=\frac{a_2}{q}=\frac{8}{2}=\underline{\underline{4}}$$

$$a_2=\underline{\underline{8}}$$

$$a_3=a_2\cdot q=\underline{\underline{16}}$$

$$a_4=a_3\cdot q=\underline{\underline{32}}.$$

Ha $q_2=\frac{1}{2}$, akkor a mértani sorozat:

$$a_1=\frac{a_2}{q}=\frac{8}{\frac{1}{2}}=\underline{\underline{16}}$$

$$a_2=\underline{\underline{8}}$$

$$a_3=a_2\cdot q=8\cdot\frac{1}{2}=\underline{\underline{4}}$$

$$a_4=a_3\cdot q=4\cdot\frac{1}{2}=\underline{\underline{2}}.$$

16.

a) $3\,\mathrm{tg}\frac{x}{3}=\sqrt{3}$

Mivel $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, ezért a feltétel:

$$\cos\frac{x}{3}\neq0$$

$$\frac{x}{3}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in Z$$

$$x\neq\frac{3\pi}{2}+k\cdot3\pi\ .$$

Rendezve az egyenletet:

$$\mathrm{tg}\frac{x}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Az $f(x)=\mathrm{tg}\,x$ alapján:

$$\frac{x}{3}=\frac{\pi}{6}+l\pi,\quad l\in \mathrm{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + l \cdot 3\pi \;.$$

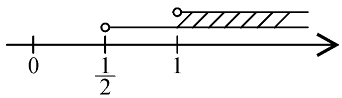
Ez a gyöksorozat megfelel a feltételnek. Minden lépésünk ekvivalens volt, így a megoldás az eredeti egyenletnek is megoldása.

b) $\frac{1}{2}\log_3(2x+1) - \log_3(x-1) = 1$

A logaritmus mögött csak pozitív érték állhat, ezért:

$2x - 1 > 0$ és $x - 1 > 0$

$x > \frac{1}{2}$ $\qquad$ $x > 1.$



Tehát az értelmezési tartomány: x > 1

Alkalmazva a logaritmusra vonatkozó azonosságokat alakítsuk át az egyenletet:

$$\log_3(2x-1)^{\frac{1}{2}} - \log_3(x-1) = 1$$

$$\log_3 \frac{\sqrt{2x-1}}{x-1} = 1$$

$$\log_3 \frac{\sqrt{2x-1}}{x-1} = \log_3 3$$

Az f (x) = $\log_3 x$ szigorú monotonitása miatt:

$$\frac{\sqrt{2x-1}}{x-1} = 3$$

$$\sqrt{2x-1} = 3(x-1)$$

$$\left(\sqrt{2x-1}\right)^2 = \left(3(x-1)\right)^2$$

$$2x - 1 = 9\,(x - 1)^2$$

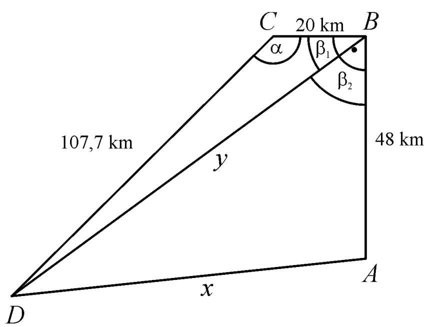
$$2x - 1 = 9x^2 - 18x + 9$$

$$0 = 9x^2 - 20x + 10$$

$$x_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{40}}{18} = \begin{matrix} x_1 \approx 1{,}46 \\ x_2 \approx 0{,}76. \end{matrix}$$

A feltételnek csak x_1 felel meg, és ez a gyök az ekvivalens átalakítások miatt az eredeti egyenletnek is megoldása.

17. Készítsünk a feladat szövegének megfelelő ábrát!



Számoljuk ki a *BCD* háromszögben a *BD* szakasz hosszát cosinustétellel:

$$y^2 = 20^2 + 107{,}7^2 - 2 \cdot 20 \cdot 107{,}7 \cdot \cos 138° \; 52'$$

$$y^2 = 15243{,}99$$

$$y = 123{,}47 \text{ km}.$$

Ahhoz, hogy a keresett *x* hosszúságot megkapjuk, tudnunk kell a *DBA* szöget. Mivel a *CBA* szög a feladat szövege alapján derékszög, ezért ha kiszámítjuk a *CBD* szöget, akkor már ismerjük a *DBA* szöget is. A *BCD* háromszögben írjuk fel a sinus tételt:

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\alpha} = \frac{CD}{DB}$$

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin 138°52'} = \frac{107{,}7}{123{,}47}$$

$$\sin\beta_1 = 0{,}5738.$$

Ebből $(\beta_1)_1 = 35{,}02°$, $(\beta_1)_2 = 180° - (\beta_1)_1 = 144{,}98°$.

Az ismert adatok alapján $(\beta_1)_2$ értéke nem megoldás.

Így $\beta_2 = 90° - \beta_1 = 54{,}98°$

Írjuk fel a *CDA* háromszögben az cosinustételt:

$$x^2 = DB^2 + BA^2 - 2 \cdot DB \cdot BA \cdot \cos 54{,}98°$$

$$x^2 = 10746{,}8$$

$$x = \underline{\underline{103{,}67\text{ km}}}.$$

Tehát a *D* hely a kiindulás *A* helyétől 103,67 km távolságra volt.